Calculamos el valor esperado así

$$\langle A\rangle(t) = \langle \psi_s(t)|\hat{A}_s|\psi_s(t)\rangle = \overbrace{\langle \psi_s(t_0)|\hat{U}^\dagger(t)}^{\text{Schrödinger}}\underbrace{\hat{U}^\dagger(t)\,\hat{A}_s\,\hat{U}(t)}_{\text{Heisenberg}}\overbrace{\hat{U}(t)|\psi_s(t_0)\rangle}^{\text{Schrödinger}}$$

$$= \langle \psi_H|A_H(t)|\psi_H\rangle$$

Partícula 1D en potencial

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_H(t) = [A_H(t), H_H(t)] + i\hbar\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_S(t)\right)_H$$

$$H_s(t) = \frac{P_s^2}{2m} + V(X_s, t) \qquad \text{Usamos} \quad \widetilde{F(A)} = F(\tilde{A})$$

$$H_H = U^\dagger H_s U = \frac{P_H^2}{2m} + V(X_H, t)$$

Además $[X_H, P_H] = [U^\dagger X_s U, U^\dagger P_s U]$

$$= U^\dagger X_s U U^\dagger P_s U - U^\dagger P_s U U^\dagger X_s U = U^\dagger \underbrace{[X_s, P_s]}_{=i\hbar} U$$

$$\cancel{i\hbar}\frac{d}{dt}\hat{P}_H = [P_H, H_H] = -\cancel{i\hbar}\frac{\partial V}{\partial X}(X_H, t) \quad \text{(lo hicieron de tarea)}$$

$$\cancel{i\hbar}\frac{d}{dt}\hat{X}_H = [X_H, H_H] = \left[X_H, \frac{P_H^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}\left([X_H, P_H]P_H + P_H[X_H, P_H]\right)$$

$$= \frac{\cancel{i\hbar}}{m}P_H$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}X_H(t) = \frac{1}{m}P_H(t)$$

$$\frac{d}{dt}P_H(t) = -\frac{\partial V}{\partial x}(X_H(t))$$

Estas ecuaciones generalizan el teorema de Ehrenfest. (i.e. en el esquema de Heisenberg las eqs se parecen a las clásicas).

El esquema de interacción

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{estructura atómica (conocida)}} + V(t) \leftarrow \text{estimulación con una onda E.M.}$$

Hay un esquema intermedio entre H y S
el esquema de interacción

$$A_I = e^{iH_0 t/\hbar} A_S e^{-iH_0 t/\hbar}$$

a diferencia de

$$A_H = e^{i(H_0 + V(t))t/\hbar} A_S e^{-i(H_0+V(t))t/\hbar}$$

$$\Rightarrow \quad V_I = e^{iH_0 t/\hbar} V e^{-iH_0 t/\hbar}$$

(tarea)

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle_I = V_I |\psi\rangle_I$$

$$\frac{dA_I}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A_I, H_0]$$

no hace fata preocuparse por H_0 para la evolucion de $|\psi\rangle_I$.

	Heisenberg	Interacción	Schrödinger
ket de estado	constante	evoluciona por V_I	evoluciona por H
observable	evoluciona por H	evoluciona por H_0	constante

Oscilador armónico

10.2. Intro

- $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$
- $F_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -kx$
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Aparece al estudiar sistemas cerca de su estado de equilibrio (límite de oscilaciones bajas)

- Vibraciones de moléculas, oscilaciones de una red cristalina

- Juega un papel central en electromagnetismo:

[hw]

  - En una cavidad hay un número infinito (discreto) de modos normales de oscilación del campo.
  - Al describir el campo en términos de estos modos, cada uno obedece una ecuación estilo oscilador armónico.
  - El campo E.M. es equivalente a un conjunto de osciladores armónicos independientes.
  - La cuantización del campo se logra considerando cada modo normal de vibración como un oscilador armónico cuántico.

- Fue el oscilador armónico lo que llevó a Planck a definir h para describir la radiación de cuerpo negro.

- La energía promedio de un oscilador armónico en equilibrio termodinámico a temperatura T es diferente en el caso clásico y cuántico.

- Se usa para describir sistemas de muchas partículas idénticas. Es el único sistema con niveles de energía equidistantes.

10.3. Clásico

- $m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx$
- Solución $x = x_M \cos(\omega t - \varphi)$
- La energía cinética $p^2/2m$
- Energía potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$
- Energía total $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$
- AL sustituir la solución en E obtenemos $E = \frac{1}{2}m\omega^2 x_M$
- E determina x_M y viceversa

Para un $V(x)$ arbitrario:

- Si tenemos un mínimo en $V(x)$, podemos aproximar $V(x) \approx a + b(x - x0)^2$

Descripción Clásica con "variables normales".

1. Quasi-classical states

1-a. Introducing the parameter α_0 to characterize a classical motion

The classical equations of motion of a one-dimensional harmonic oscillator, of mass m and angular frequency ω, are written:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \dfrac{1}{m}p(t) & \text{(1a)} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) = -m\omega^2\, x(t) & \text{(1b)} \end{cases}$$

The quantum mechanical calculations we shall perform later will be simplified by the introduction of the dimensionless quantities:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \beta\, x(t) \\[2ex] \hat{p}(t) = \dfrac{1}{\hbar\beta}\, p(t) \end{cases} \tag{2}$$

where:

$[\hbar] = ET \quad [E] = M\frac{L^2}{T^2} \quad \left[\frac{m\omega}{\hbar}\right] = \frac{M\frac{1}{T}}{M\frac{L^2}{T^2}T} = \frac{1}{L^2}$

$$\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \tag{3}$$

Equations (1) can then be written:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{x}(t) = \omega\,\hat{p}(t) & \text{(4a)} \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{p}(t) = -\omega\,\hat{x}(t) & \text{(4b)} \end{cases}$$

The classical state of the harmonic oscillator is determined at time t when we know its position $x(t)$ and its momentum $p(t)$, that is, $\hat{x}(t)$ and $\hat{p}(t)$. We shall therefore combine these two real numbers into a single dimensionless complex number $\alpha(t)$ defined by:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{x}(t) + i\,\hat{p}(t)\right] \tag{5}$$

The set of two equations (4) is equivalent to the single equation:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) = -i\omega\,\alpha(t) \tag{6}$$

$-i\omega(x+ip) = -i\omega x + \omega p$

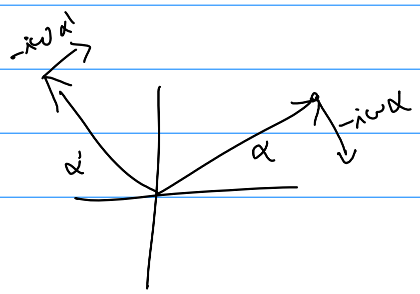
$\dot{x} + i\dot{p} = \omega p - i\omega x$

whose solution is:

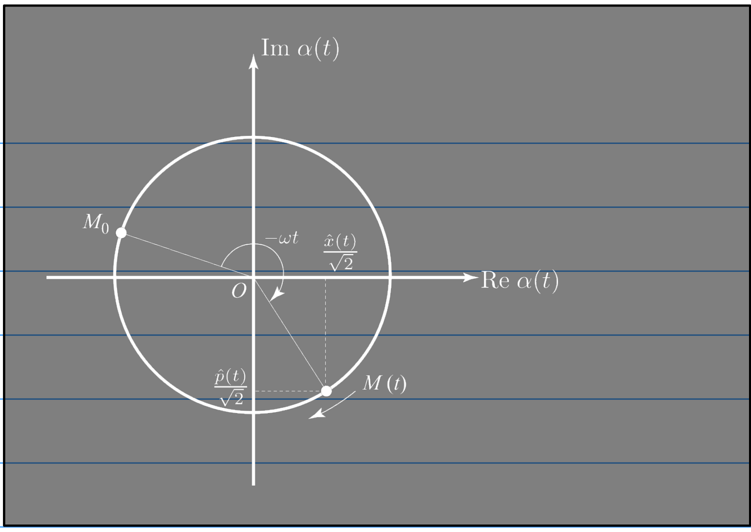
$$\alpha(t) = \alpha_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{7}$$

where we have set:

$$\alpha_0 = \alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\hat{x}(0) + i\,\hat{p}(0)\right] \tag{8}$$



$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ multiplicar por $-i$ es rotar 90° ?



According to (5) and (7), we have:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha_0\, e^{-i\omega t} + \alpha_0^*\, e^{i\omega t}\right] & \text{(9a)} \\ \\ \hat{p}(t) = -\dfrac{i}{\sqrt{2}}\left[\alpha_0\, e^{-i\omega t} - \alpha_0^*\, e^{i\omega t}\right] & \text{(9b)} \end{cases}$$

As for the classical energy $\mathcal{H}$ of the system, it is constant in time and equal to:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m}[p(0)]^2 + \frac{1}{2}m\omega^2[x(0)]^2 \\ &= \frac{\hbar\omega}{2}\left\{[\hat{x}(0)]^2 + [\hat{p}(0)]^2\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

Con lo que obtenemos (usando (8))

$\mathcal{H} = \hbar\omega|\alpha_0|^2$